MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME COMPOSITION

DURÉE : 3 heures

On rappelle que le produit des deux séries entières $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ est la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$, où $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

I

1° Résoudre l'équation différentielle $(1 - x)\, y' - xy = 0$.

2° Construire le graphe de la fonction $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1-x}$.

3° Montrer que la fonction f est développable en série entière dans l'intervalle $]-1, +1[$ sous la forme $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, où $a_n = \sum_{p=0}^{n} \dfrac{(-1)^p}{p\,!}$.

II

Soit E un ensemble fini, et $n \geqslant 1$ le nombre de ses éléments.

1° Quel est le nombre de bijections de E_n sur lui-même?

2° Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, on désigne par $I(k, n)$ le nombre de bijections de E_n sur lui-même laissant exactement k éléments invariants. On convient de poser $I(0,0) = 1$.

Donner les valeurs de $I(n, n)$ et de $I(n-1, n)$, pour $n \in \mathbf{N}^*$.

Montrer que $I(k, n) = C_n^k\, I(0, n-k)$.

En déduire : $\sum_{k=0}^{n} C_n^k\, I(0, k) = n\,!$.

3° On considère la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{I(0, n)}{n\,!} x^n$.

Montrer que son rayon de convergence R est supérieur ou égal à 1.

On désigne par g sa somme dans $]-R, +R[$.

Démontrer, en effectuant le produit de deux séries entières, que :

$$e^x\, g(x) = \frac{1}{1-x}, \quad \text{pour} \quad x \in]-R, +R[.$$

En déduire que g et f coïncident dans $]-R, +R[$ et que $R = 1$.

4° Calculer les nombres $I(k, n)$ en fonction des coefficients a_n considérés au I.

III

On répartit au hasard, et sans répétition, n boules numérotées de 1 à n dans n urnes numérotées de 1 à n. On dira qu'il y a « rencontre » lorsque la boule numérotée i se trouve dans l'urne numérotée i .

On désigne par X_n la variable aléatoire égale au nombre de rencontres obtenues lors de cette répartition.

1° Montrer que pour $0 \leqslant k \leqslant n$, $P(X_n = k) = \dfrac{I(k, n)}{n\,!}$.

En déduire que la loi de X_n est définie par $P(X_n = k) = \dfrac{a_{n-k}}{k\,!}$.

2° Donner la loi de X_n pour $n = 1, 2, 3, 4$, et calculer dans chacun de ces cas l'espérance et la variance de X_n .

3° Montrer que pour $1 \leqslant k \leqslant n$, $kP(X_n = k) = P(X_{n-1} = k - 1)$.

En déduire, pour tout n, la valeur de l'espérance de X_n .

Déterminer, pour tout n, la variance de X_n .

4° Déterminer, pour k fixé, $\lim_{n \to +\infty} P(X_n = k)$.

Par quelle loi usuelle peut-on approcher X_n lorsque n est grand?

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail